Devoir maison n$^{\text{o}}$ 1

À rendre le lundi 9 septembre

Avant toute chose, relire la fiche de consignes et conseils de rédaction.

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. *Du calcul !*
Les deux questions sont indépendantes.

1. En détaillant les étapes, simplifier au maximum :

$$A = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)}, \qquad B = \mathrm{e}^{x-\ln x}, \qquad C = \mathrm{e}^{-3\ln(t)-2\ln(t+1)}.$$

2. a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+2x)-2x$ et de $1-\cos x$.

   b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{1-\cos x}$.

Exercice 2. *Une étude de fonctions*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Justifier que f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
4. Montrer que f est continue en 0.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
6. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
   Indication : On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 3.
7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.
   a) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
8. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}$, établir le tableau de variations complet de la fonction f. On détaillera le calcul de la limite en $+\infty$.

Exercice 3. [**Facultatif**] *Utilisation des théorèmes*
Les deux questions sont indépendantes.

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans l'approximation

$$\sqrt{10\,001} \approx 100.$$

2. Soit P un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles et simples. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples.